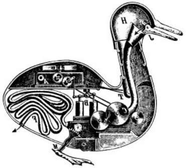
Circuits booléens, prédicats modulaires et langages réguliers

Charles Paperman

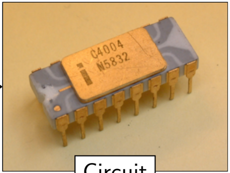
LIAFA, Université Paris Diderot

Soutenance de thèse, 2014

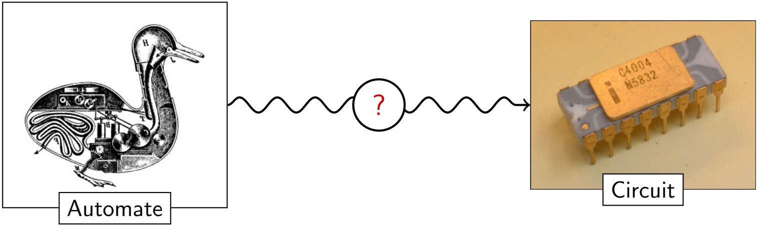


Automate

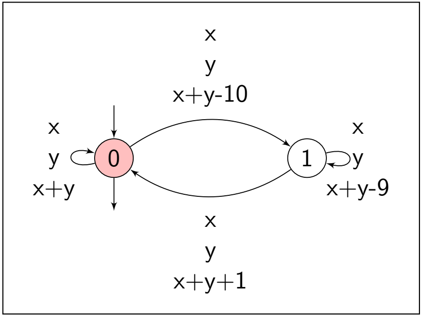
?



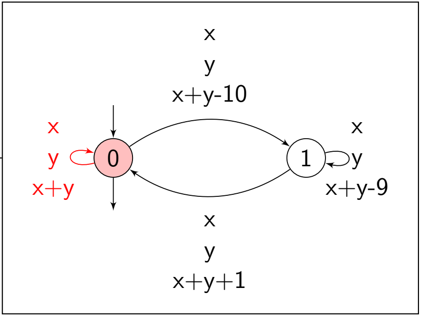
Circuit



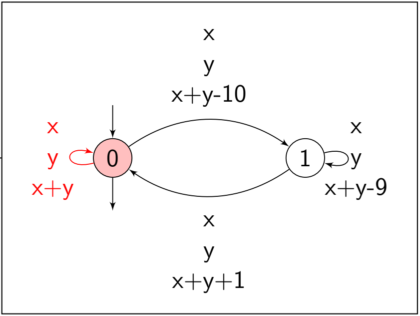
1. Présentation de la conjecture de Straubing
2. L'ajout des prédicats modulaires
3. Les circuits d'arité moyenne bornée
4. Les prédicats de degré fini et la logique à deux variables



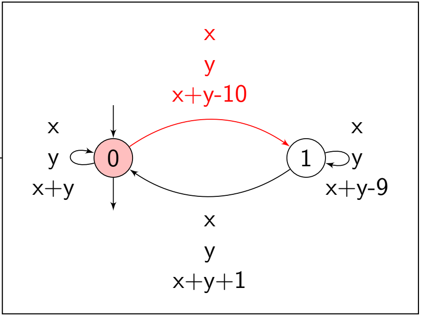
$$\begin{array}{r} 315453 \\ 629901+ \\ \hline 934464 \end{array}$$



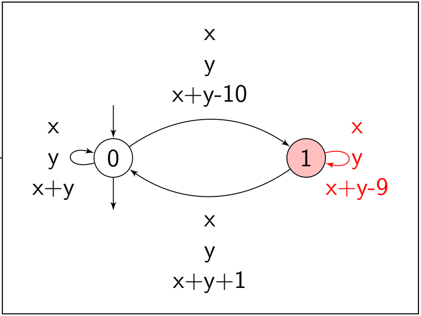
$$\begin{array}{l} 315453 \\ 629901+ \\ \hline 934464 \end{array}$$



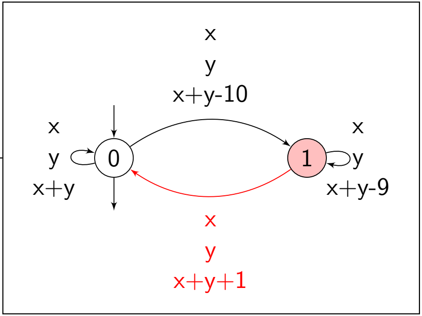

```
 315453
 629901+
--------
 934464
```



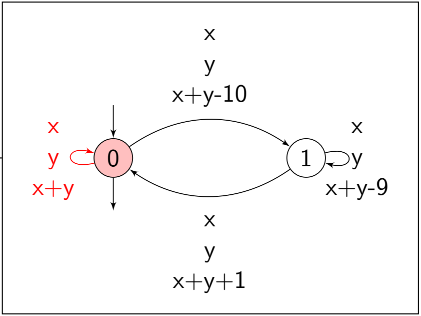
$$\begin{array}{r} 315453 \\ 629901 + \\ \hline 934464 \end{array}$$



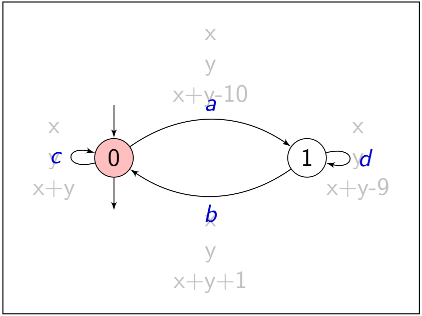
$$
\begin{array}{r}
315453 \\
629901+ \\
\hline
934464
\end{array}
$$

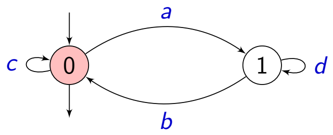


$$\begin{array}{r} 315453 \\ 629901+ \\ \hline 934464 \end{array}$$



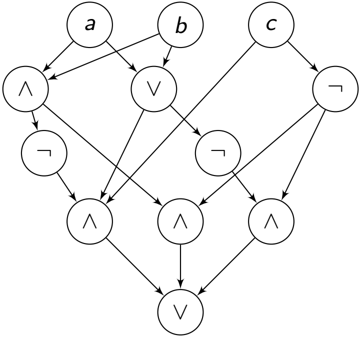
$$\begin{array}{r} 315453 \\ 629901+ \\ \hline 934464 \end{array}$$


x
y
x+y-10
a
x
c
y
x+y
0
1
x
y
d
x+y-9
b
x
y
x+y+1

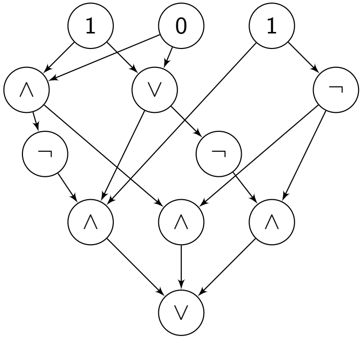


$$(c + ad^*b)^*$$

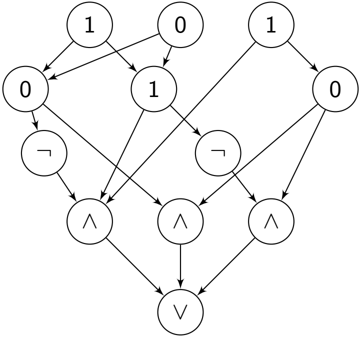
Un exemple de circuit



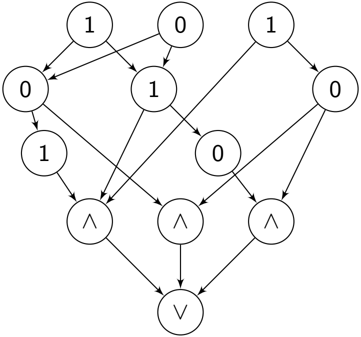
Un exemple de circuit



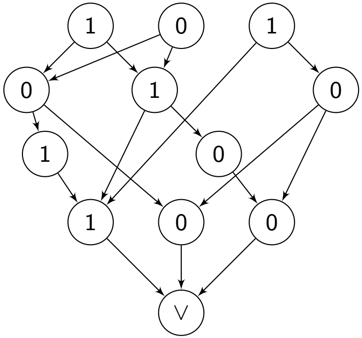
Un exemple de circuit



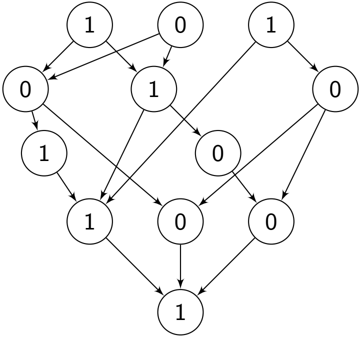
Un exemple de circuit



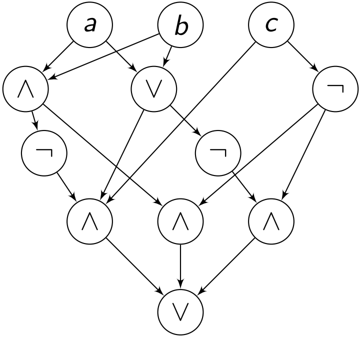
Un exemple de circuit



Un exemple de circuit

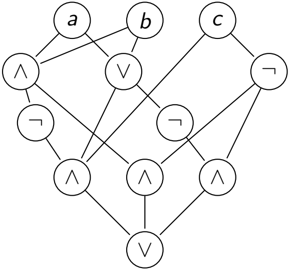


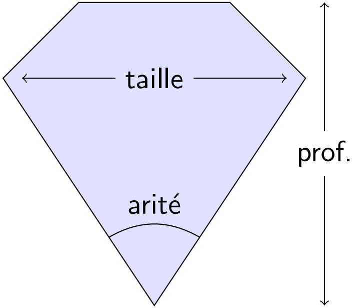
Un exemple de circuit



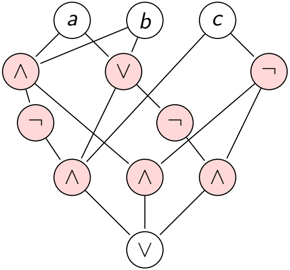
Mots acceptés : abc de $\{0,1\}^3$ tels que $a \oplus b = c$.

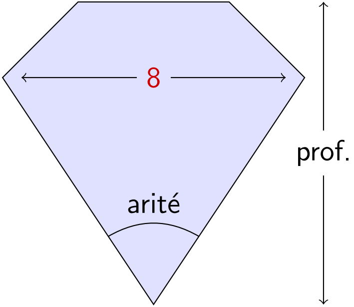
Paramètres de complexité



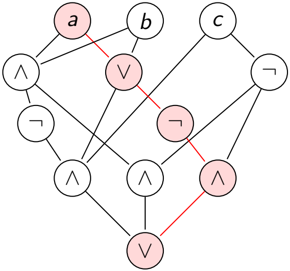


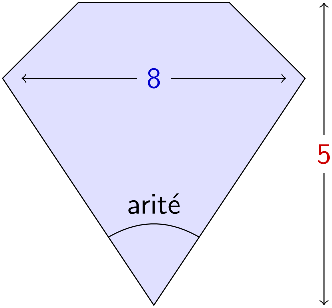
Paramètres de complexité



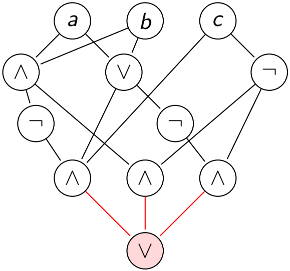


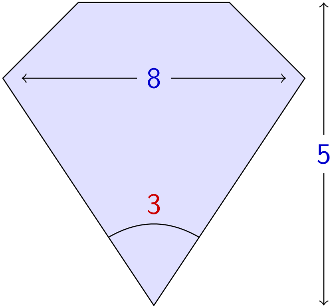
Paramètres de complexité

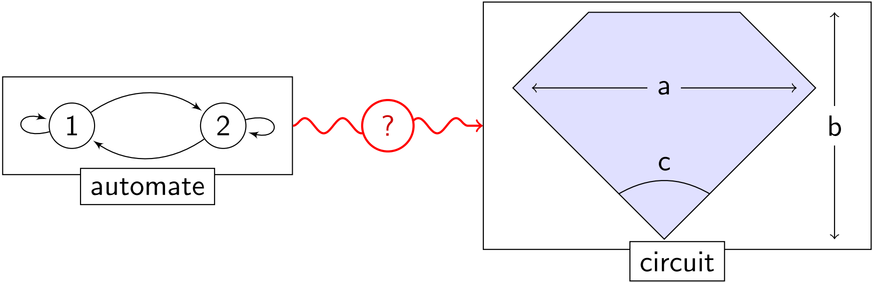


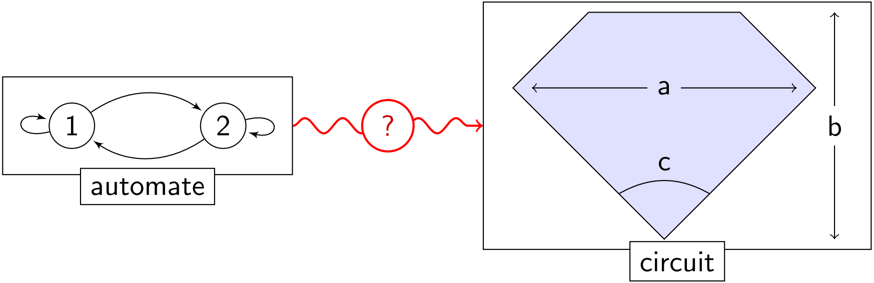


Paramètres de complexité



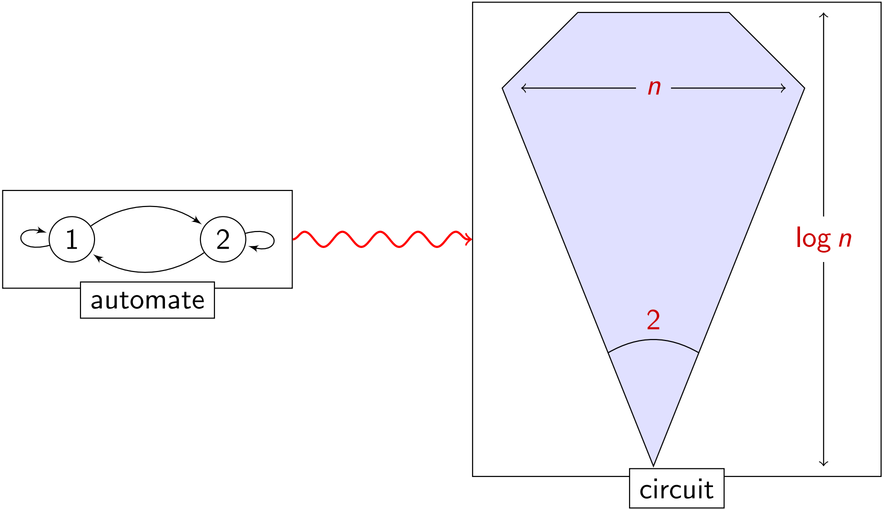



1
2
automate
?
a
b
c
circuit



Proposition (folklore)

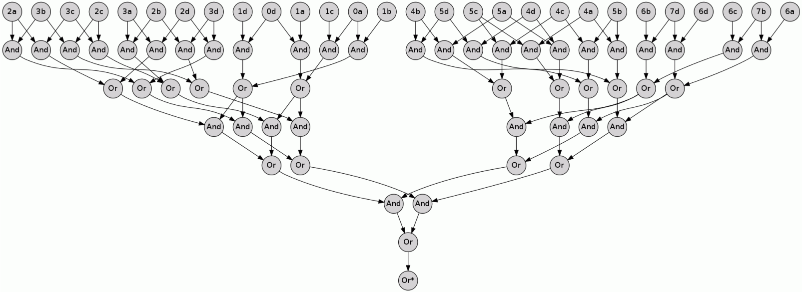
Tous les langages réguliers sont calculés par des circuits de profondeur logarithmique, de taille linéaire et d'arité bornée.



1
2
automate
n
log n
2
circuit

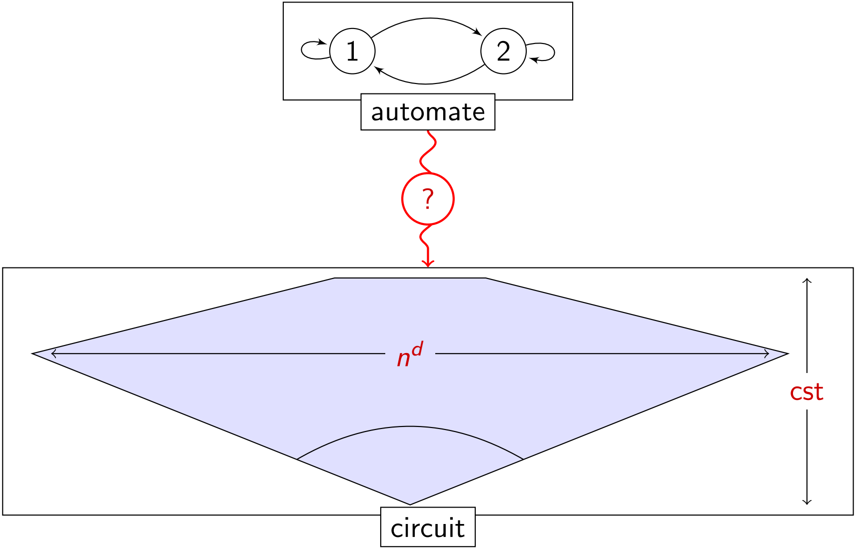
Retour à la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

La relation d'addition sur 8 entrées, taille: 80, profondeur: 7.

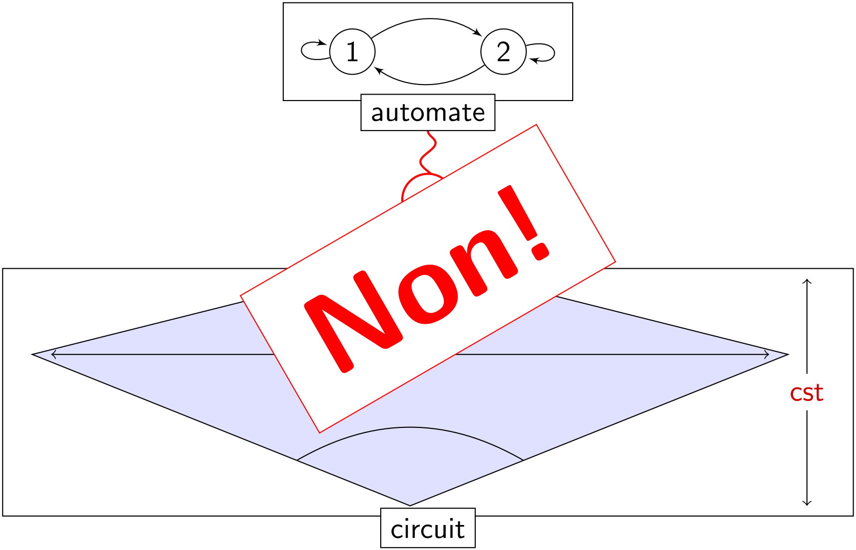


Peut-on faire mieux?

Peut-on faire mieux?



Peut-on faire mieux?



Un peu de complexité

Théorème (Furst, Saxe et Sipser, 84)

Il n'est pas possible de calculer le langage parité avec des circuits de profondeur constante et de taille polynomiale.

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Théorème (BCST[1], 92)

On peut décider si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur constante et de taille polynomiale ($\mathbf{AC^0}$).

[1] Barrington, Compton, Straubing et Thérien

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Théorème (BCST[1], 92)

On peut décider effectivement si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur constante et de taille polynomiale ($\mathbf{AC^0}$).

[1] Barrington, Compton, Straubing et Thérien

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

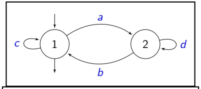
Théorème (BCST[1], 92)

On peut décider effectivement si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur constante et de taille polynomiale ($\mathbf{AC^0}$).

$\rightarrow$ Il s'agit d'un résultat algébrique.

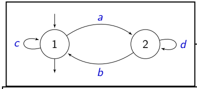
[1]Barrington, Compton, Straubing et Thérien

Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

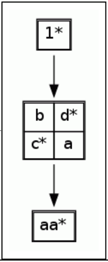


Automate minimal

Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

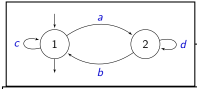


Automate minimal

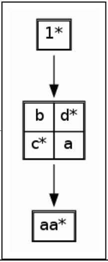


Morphisme syntaxique

Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$



Automate minimal

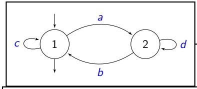


Morphisme syntaxique

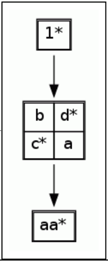
1. Entre a et b successifs que des d
2. Entre b et a successifs que des c
3. Première lettre non c est un a.
4. Dernière lettre non c est un b.

Description logique

Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$



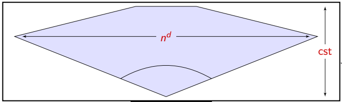
Automate minimal



Morphisme syntaxique

1. Entre a et b successifs que des d
2. Entre b et a successifs que des c
3. Première lettre non c est un a.
4. Dernière lettre non c est un b.

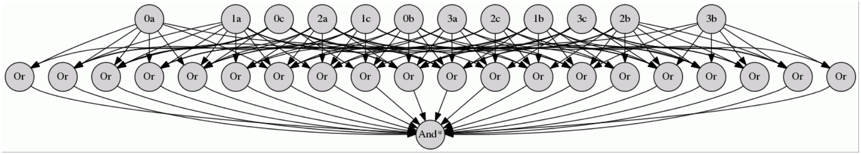
Description logique



Circuit

Résultat sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

Sur 4 entrées, taille: 33, profondeur: 3.



Théorème (BCST, 92)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}\mathrm{rb}] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Théorème (BCST, 92)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}\mathrm{rb}] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Formules logiques:

- $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- Prédicats de lettres
- Prédicats numériques
  $x < y$
  $x + y = z$
  $xy = z, \ldots$

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}\mathrm{rb}] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Formules logiques:

- $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- Prédicats de lettres
- Prédicats numériques
  $x < y$
  $x + y = z$
  $xy = z, \ldots$

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}\mathrm{rb}] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Formules logiques:

- $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- Prédicats de lettres
- Prédicats numériques
  $x < y$
  $x + y = z$
  $xy = z, \ldots$

Formules logiques:

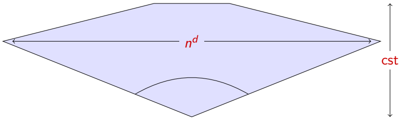
- $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- Prédicats de lettres
- Prédicats réguliers
  $x < y$
  $x = y + k$ ($\mathcal{L}$oc)
  $x \equiv r \bmod q$ ($\mathcal{M}$od)

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}\mathrm{rb}] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Classe de complexité $\mathbf{AC^0}$
(Immerman, 87)



Classe de langages réguliers **QA**:

- semigroupe stable apériodique
- Décidable
- Effectif

Conjecture de Straubing (variante)

$$\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{R}\mathrm{eg}] \cap \textbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Conjecture de Straubing (variante)

$$\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{R}\text{eg}] \cap \textbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\mathcal{R}\text{eg}]$$

Classe de langages:

- σ prédicats numériques
- classes de circuits (uniformité)
- calcul de bornes inférieures

Conjecture de Straubing (variante)

Les langages réguliers

$$\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{R}\mathrm{eg}] \cap \mathbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Classe de langages:

- σ prédicats numériques
- classes de circuits (uniformité)
- calcul de bornes inférieures

Conjecture de Straubing (variante)

Les langages réguliers

$$\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{R}\mathrm{eg}] \cap \textbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$$

Classe de langages:

- σ prédicats numériques
- classes de circuits (uniformité)
- calcul de bornes inférieures

Classe de langages réguliers:

- Caractérisation algébrique ?
- Décidable ?
- Effective ?

Principales contributions

En logique:

- Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
  $\rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{A}\mathsf{rb}_1, \mathcal{R}\mathsf{eg}] \cap \mathcal{R}\mathsf{eg} = \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathsf{eg}]$

Principales contributions

En logique:

- Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
  $\rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{A}\mathsf{rb}_1, \mathcal{R}\mathsf{eg}] \cap \mathcal{R}\mathsf{eg} = \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathsf{eg}]$

En algèbre:

- Résultats de transfert $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathsf{od}]$

Principales contributions

En logique:

- Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
  $\rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{A}\mathrm{rb}_1, \mathcal{R}\mathrm{eg}] \cap \mathcal{R}\mathrm{eg} = \mathcal{F}[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$

En algèbre:

- Résultats de transfert $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}]$

En complexité de circuits:

- Caractérisation décidable et effective des langages réguliers dans la classe des circuits de profondeur constante et d'arité moyenne bornée.
- Un théorème à la Crane-Beach pour $\mathbf{FO}^2$:
  $\rightarrow \mathbf{FO}^2[\mathcal{D}\mathrm{fin}, \mathcal{R}\mathrm{eg}] \cap \mathcal{R}\mathrm{eg} = \mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$.

Ajout des prédicats modulaires

Ajout des prédicats modulaires

Problématique:
Transfert de décidabilité $\mathcal{F}[\sigma] \to \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\text{od}]$?

Deux étapes:

1. Transfert à d fixé $\mathcal{F}[\sigma] \to \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\text{od}_d]$.
2. Déterminer un tel indice de délai d.

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la séparation est décidable. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathsf{od}_d]$ est décidable.

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la séparation est décidable. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_d]$ est décidable.

$\rightarrow$ Repose uniquement sur la définition de fragment.

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la séparation est décidable. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_d]$ est décidable.

$\rightarrow$ Repose uniquement sur la définition de fragment.

$\rightarrow$ Ce n'est pas un résultat algébrique.

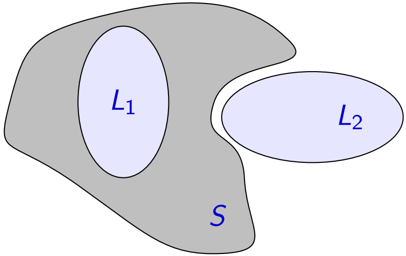
Le problème de séparation

Entrées:

$$\text{Deux langages } L_1 \text{ et } L_2$$

Question:

$$\text{Existe-t-il } S \in \mathcal{F}[\sigma] \text{ tel que } \begin{cases} L_1 \subseteq S \\ L_2 \cap S = \emptyset \end{cases} \quad ?$$



Délai

Entrées:
Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

Question:
Peut-on calculer un entier d tel que:

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_d]$$

Délai

Entrées:
Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

Question:
Peut-on calculer un entier d tel que:

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_d]$$

Cadre algébrique:

Délai

Entrées:
Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

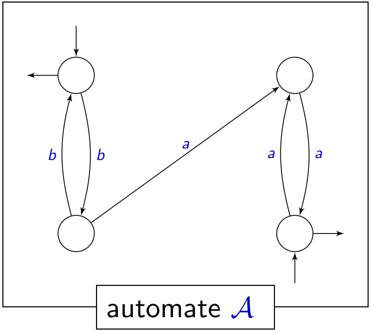
Question:
Peut-on calculer un entier d tel que:

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_d]$$

Cadre algébrique:
$\rightarrow$ Fragment équivalent à une variété de monoïdes ou de semigroupes finis.

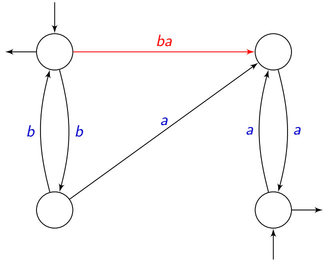
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

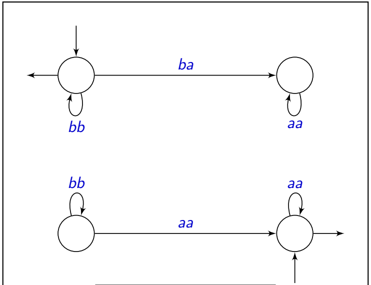
$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



automate $\mathcal{A}$

L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

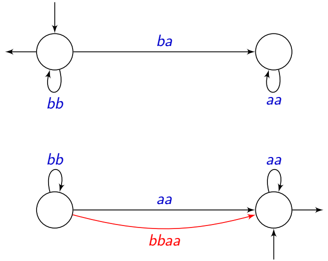
$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



automate $\mathcal{A}^2$

L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

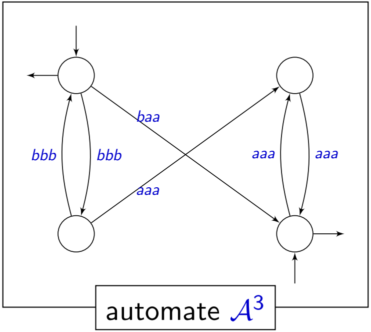
$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



automate $\mathcal{A}^2$

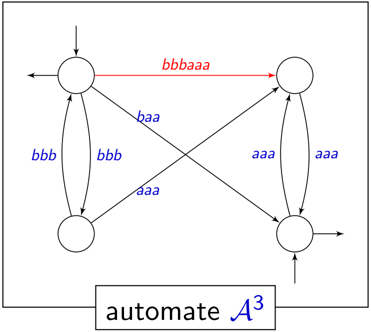
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



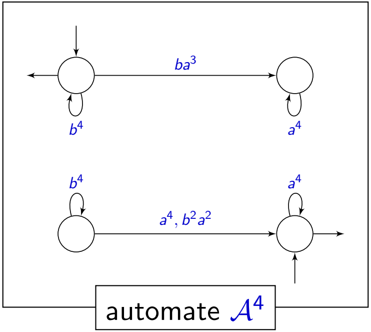
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



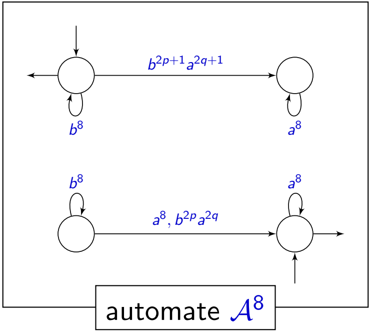
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



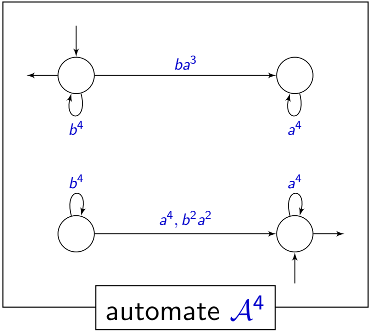
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

$\rightarrow$ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



- L'indice de stabilité de $(bb)^*(aa)^*$ est donc 4.
- Le monoïde [semigroupe] stable est le monoïde [semigroupe] de transition de $\mathcal{A}^s$.
- **QV** : langages dont le monoïde [semigroupe] stable dans **V**.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale $\mathbf{V}$, alors l'indice de délai est l'indice de stabilité .

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale **V**, alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] = \mathbf{QV}$.

$\rightarrow$ **V** variété de monoïdes ou de semigroupes.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale **V**, alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] = \mathbf{QV}$.

$\rightarrow$ **V** variété de monoïdes ou de semigroupes.

Exemples:

$\mathbf{FO}[\mathcal{L}\mathrm{oc}]$, $\mathbf{FO}[<]$, $\mathbf{FO}^2[<]$, $\mathbf{FO}^2[<, \mathcal{L}\mathrm{oc}]$

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale $\mathbf{V}$, alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] = \mathbf{QV}$.

$\rightarrow$ $\mathbf{V}$ variété de monoïdes ou de semigroupes.

Exemples:

$\mathbf{FO}[\mathcal{L}\mathrm{oc}]$, $\mathbf{FO}[<]$, $\mathbf{FO}^2[<]$, $\mathbf{FO}^2[<, \mathcal{L}\mathrm{oc}]$

Contre-exemple:

- $\mathcal{B}\Sigma^1[<] = \mathbf{J}$
- $(bb)^*(aa)^* \in \mathbf{QJ}$
- $(bb)^*(aa)^* \notin \mathcal{B}\Sigma^1[<, \mathcal{M}\mathrm{od}]$.

Théorèmes partiels de délai

- rang: structure des équations du global.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de monoïdes **V** de rang k, alors

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_{ks}].$$

Théorèmes partiels de délai

- rang: structure des équations du global.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de monoïdes $\mathbf{V}$ de rang k, alors

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_{ks}].$$

- rang axiomatique: nombre de variables des équations.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de semigroupes $\mathbf{V}$ de rang axiomatique k et contient le langage $(ab)^*$, alors

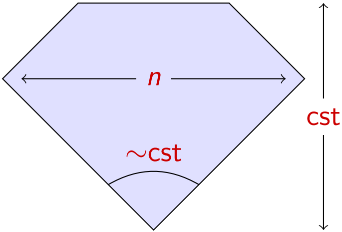
$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}] \to L \in \mathcal{F}[\sigma, \mathcal{M}\mathrm{od}_{(2k+1)s}].$$

Fragment	Description algébrique	Délai
$\mathbf{FO}[<, \mathcal{M}od]$	**QA** BCST, 92	s
$\mathbf{FO}^2[<, \mathcal{M}od]$	**QDA** Dartois, P., 13	s
$\mathbf{FO}^2_k[<, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{V}_k * \mathbf{MOD}$ Dartois, P.	ks
$\mathbf{FO}^2[<, \mathcal{L}oc, \mathcal{M}od]$	**QLDA** Dartois, P.	s
$\mathbf{FO}^2_k[<, \mathcal{L}oc, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{V}_k * \mathbf{D} * \mathbf{MOD}$ Dartois, P.	$(12k+1)s$
$\mathcal{B}\Sigma_1[<, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{J} * \mathbf{MOD}$ Chaubard, Pin et Straubing, 06	$s, 2s$
$\mathbf{FO}[\mathcal{M}od]$	$\mathbf{QJ}_1$ Dartois, P.	s
$\mathbf{FO}[\mathcal{L}oc, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{QLJ}_1$ Dartois, P.	s
$\mathbf{FO}[=, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{ACom} * \mathbf{MOD}$ Dartois, P.	$2s$
$\mathbf{FO}[=, \mathcal{L}oc, \mathcal{M}od]$	$\mathbf{ACom} * \mathbf{D} * \mathbf{MOD}$ Dartois, P.	$11s$

Circuits d'arité moyenne bornée

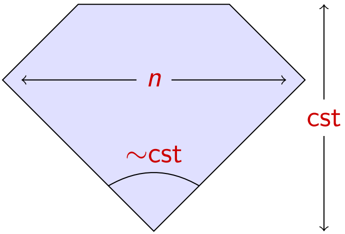
Théorème (Koucký, Pudlák et Thérien, 05)

Un langage régulier à lettre neutre est calculable par un circuit de profondeur constante et d'arité moyenne bornée (**WLAC⁰**) si et seulement s'il appartient à $\mathbf{FO}^2[<]$.



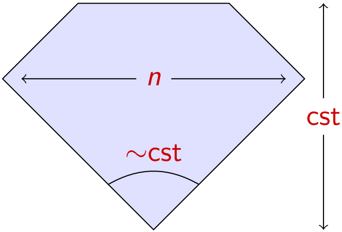
Théorème

Un langage régulier ~~à lettre neutre~~ est calculable par un circuit de profondeur constante et d'arité moyenne bornée (**WLAC⁰**) si et seulement s'il appartient à $\mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$.



Théorème

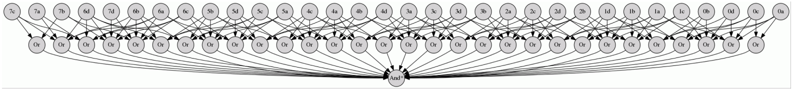
Un langage régulier à lettre neutre est calculable par un circuit de profondeur constante et d'arité moyenne bornée (**WLAC**$^{\mathbf{0}}$) si et seulement s'il appartient à $\mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$.



$\rightarrow$ Conséquence de la caractérisation algébrique de $\mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\mathrm{eg}]$.

Résultat sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

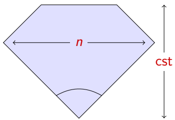
Sur 8 entrées, taille: 63, profondeur: 3.



Conjecture de Straubing et logique à deux variables

$$\mathbf{FO}^2[\mathcal{A}rb] \cap \mathbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathbf{FO}^2[\mathcal{R}eg]$$

Classe de complexité **$\mathbf{LAC^0}$** (Koucký, Lautemann, Poloczek et Thérien, 06)



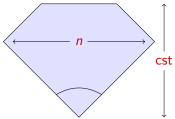
Classe de langages réguliers **QLDA**:

- semigroupe stable localement **DA**
- Décidable
- Effectif

Conjecture de Straubing et logique à deux variables

$$\mathbf{FO}^2[\mathcal{A}rb] \cap \mathbf{REG} \stackrel{?}{=} \mathbf{FO}^2[\mathcal{R}eg]$$

Classe de complexité **LAC^0** (Koucký, Lautemann, Poloczek et Thérien, 06)

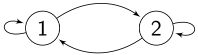


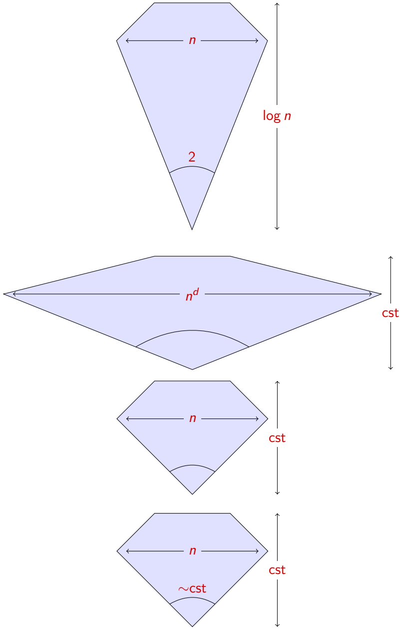
Classe de langages réguliers **QLDA**:

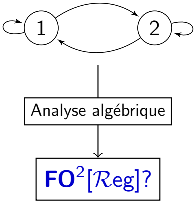
- semigroupe stable localement **DA**
- Décidable
- Effectif

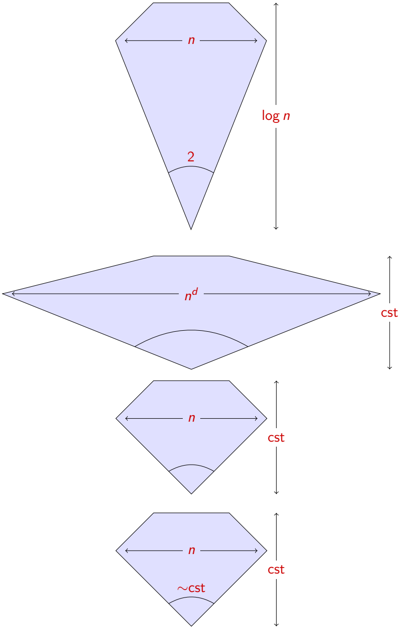
Théorème de dichotomie

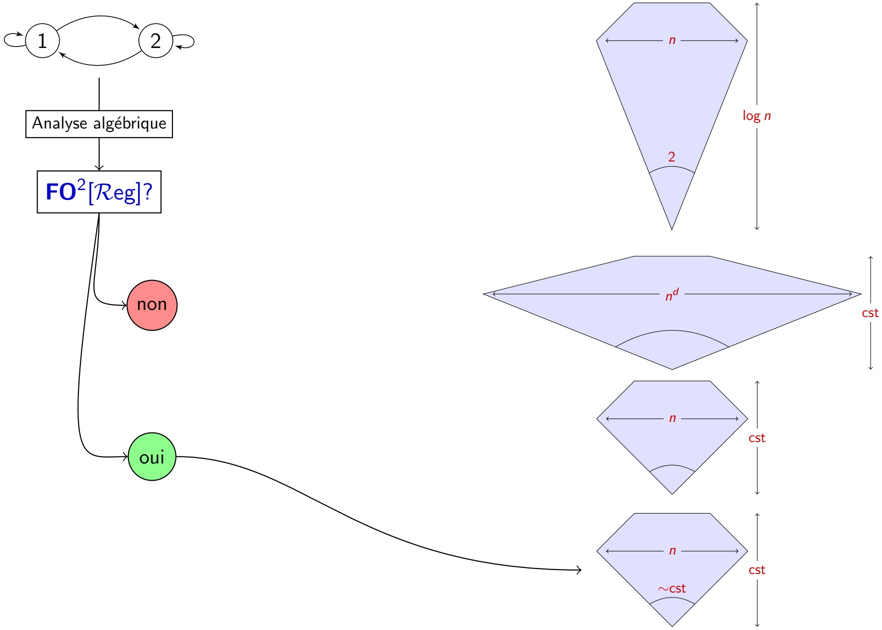
Si la conjecture de Straubing est vraie pour $\mathbf{FO}^2[\mathcal{A}rb]$, alors tous les langages réguliers qui ont une complexité de circuits linéaire ont également une arité moyenne bornée.

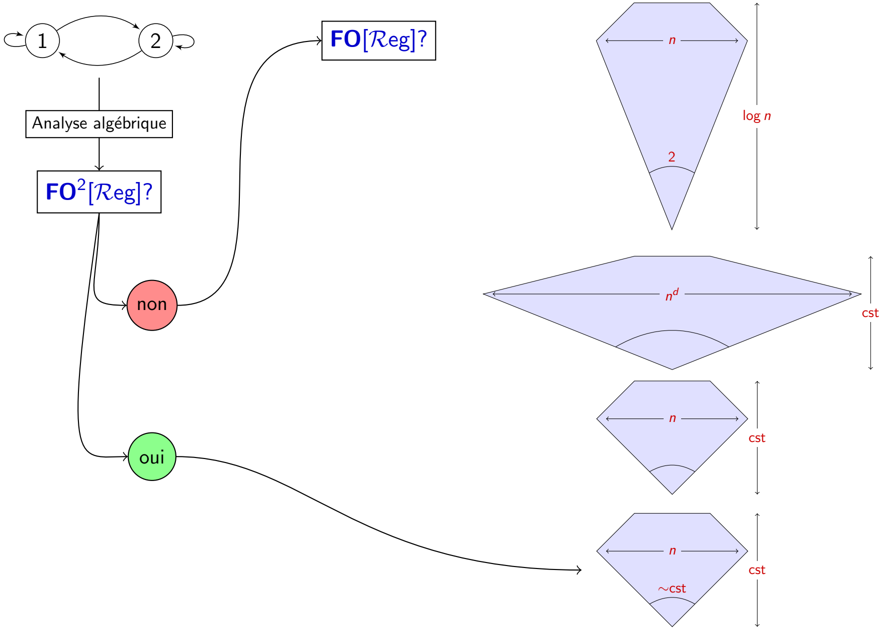

1
2


n
log n
2
n^d
cst
n
cst
n
cst
~cst

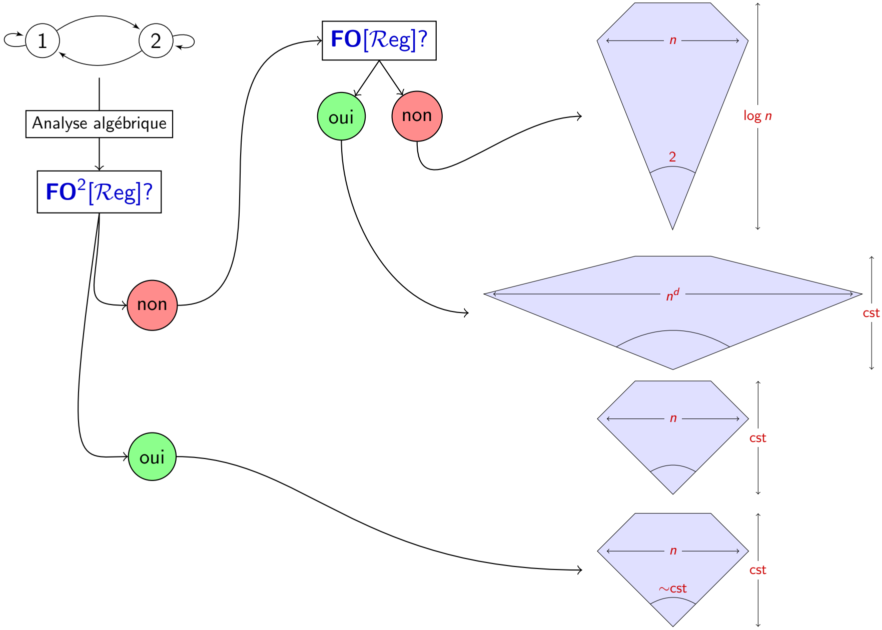

1
2
Analyse algébrique
FO²[𝓡eg]?


n
2
log n
n^d
cst
n
cst
n
∼cst
cst

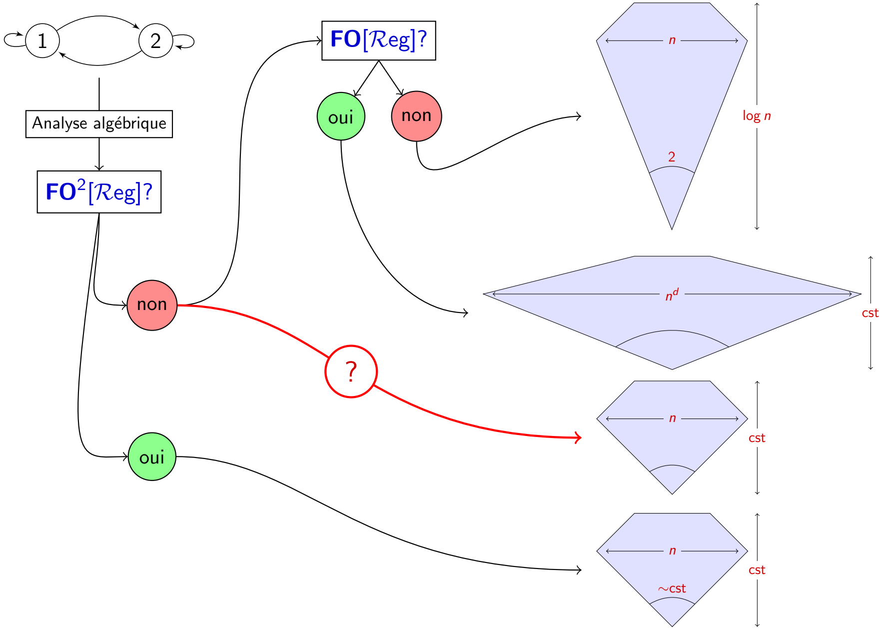

1
2
Analyse algébrique
FO²[𝓡eg]?
non
oui
n
log n
2
n^d
cst
n
cst
n
cst
∼cst



1
2
Analyse algébrique
FO²[Reg]?
FO[Reg]?
non
oui
n
log n
2
n^d
cst
n
cst
n
∼cst
cst



1
2
Analyse algébrique
FO²[𝓡eg]?
non
oui
FO[𝓡eg]?
oui
non
n
log n
2
n^d
cst
n
cst
n
~cst
cst


1
2
Analyse algébrique
FO²[𝓡eg]?
non
oui
FO[𝓡eg]?
oui
non
?
n
2
log n
n^d
cst
n
cst
n
∼cst
cst

Un théorème à la Crane-Beach[2]

[2] Barrington , Immermann , Lautemann , Schweikardt , Therien, 01

Prédicats de degré fini

Un prédicat uniforme d'arité 2 est de degré fini si chaque entier est en relation avec un nombre fini d'entiers.

Notation :

L'ensemble des prédicats de degré fini : $\mathcal{D}\mathrm{fin}$.

Exemples :

- Les prédicats de degré borné $kx = y$, $x^k = y, \ldots$
- Le prédicat $tBit(x, y)$ tel que le $(y - x)^{\text{ème}}$ bit de x est un 1.

Co-exemples :

- L'ordre $x < y$.
- Le prédicat $Bit(x, y)$ tel que le $y^{\text{ème}}$ bit de x est un 1.

Langages à lettre neutre

Un langage L a une lettre neutre e si pour tout mot u, v,
$uev \in L \leftrightarrow uv \in L$

Notation :
Langages à lettre neutre: **LeN**

Exemples :

- Les langages modulaires.
- Le langage $c^*(ac^*bc^*)^*$.

Notation :

- L'ensemble des prédicats de degré fini: $\mathcal{D}\mathrm{fin}$
- Langages à lettre neutre: **LeN**

Théorème

Pour chaque entier k, $\mathbf{FO}^2_k[<, \mathcal{D}\mathrm{fin}] \cap \mathbf{LeN} \subseteq \mathbf{FO}^2_k[<]$.

Notation :

- L'ensemble des prédicats de degré fini: $\mathcal{D}\text{fin}$
- Langages à lettre neutre: **LeN**

Théorème

Pour chaque entier k, $\mathbf{FO}_k^2[<, \mathcal{D}\text{fin}] \cap \mathbf{LeN} \subseteq \mathbf{FO}_k^2[<]$.

Corollaire

$\mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\text{eg}, \mathcal{D}\text{fin}] \cap \mathcal{R}\text{eg} = \mathbf{FO}^2[\mathcal{R}\text{eg}]$

Perspectives

Algébrique:

- Étendre le théorème du délai (variétés positives):
  $\rightarrow \Sigma_k[\mathcal{R}\text{eg}]$ et $\mathcal{B}\Sigma_k[\mathcal{R}\text{eg}]$?

Complexité:

- Étendre aux transducteurs, aux automates d'arbres ...
- Étudier $\mathbf{FO}^2$ avec d'autres classes de prédicats:
  $\rightarrow\mathbf{FO}^2[<, \text{Bit}]$?

Logique:

- Étudier la conjecture de substitution faible.